ＩＢ　解析特論（$Fourier$ 変換）　講義報告[4]

２００８年3月1日（土）　１４：００−１６：００

$\mathbb{R}$ 上の急減少関数 f は、$\mathbb{R}$ 上で有界、かつ一様連続であることを示した。これと前回、証明した「$Gau\beta$ の核による近似の補題」により急減少関数全体 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の $Fourier$ 逆変換の存在を示した。次に、$Fourier$ 変換が、$L^2(\mathbb{R})-$ ノルムの意味で $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の等長変換であることを示した。最後に、$Fourier$ 変換の固有関数である $Hermite$ 多項式を扱った。

練習問題 1.3. $\mathbb{R}$ 上の急減少関数 f は、$\mathbb{R}$ 上で有界、かつ一様連続である。

補題 1.7. 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して、

$$\|\mathfrak{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$$

すなわち、$Fourier$ 変換 $\mathfrak{F}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ への等長変換である。ただし、$\|\ \|_2$ は $L^2(\mathbb{R})-$ ノルムとする。

2　$Fourier$ 変換の固有関数

練習問題 2.1.

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2)\partial_x^n(\exp(-x^2)) \quad for \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

H_n はｎ次多項式であることを示せ。H_n をｎ次の $Hermite$ **多項式**と言う。また、

$$h_n(x) = H_n(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

とおいたとき、h_n をｎ次の $Hermite$ **関数**と言う。

補題 2.1.

1. $H_n'(x) = -2nH_{n-1}(x)$
2. $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$

補題 2.2.

1. $h_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
2. $\mathfrak{F}(h_n) = (-\sqrt{-1})^n h_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$
3. $\langle h_m, h_n\rangle = \begin{cases} 2^{2n}n!\sqrt{2\pi} & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$

記録　J.S

[4] 数学工房　http://www.sugakukobo.com/